TITLE:
数式処理の例題 : 常微分方程式の解法 (1) (計算機構論研究会報告集)

AUTHOR(S):
渡辺, 隼郎

CITATION:
渡辺, 隼郎. 数式処理の例題 : 常微分方程式の解法 (1) (計算機構論研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1969, 75: 91-106

ISSUE DATE:
1969-06

URL:
http://hdl.handle.net/2433/107969

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
75巻 1969年 91-106

数式処理の例題
常微分方程式の解法 (1)

京大 数研 渡辺隼郎

§1. 序

常微分方程式を非数値的に計算機で解かせることは，実用上からいって極めて大切である。しかし非数値的に解くといっても，求積法もあれば巾級数解を求めることもあり，目的も様々である。またこれを実現するためのプログラミング言語がどの程度のもので，どの様な機能を有すればよいのかもよく分らない。そこでこれらの疑問を調べるために有理関数係数をもつ線形常微分方程式の確定特異点における対数項出現の判定を数式処理で行うことを試みてみた。対数項は特異点における解の特異性をあらわすものであるから，もしこれが出ないのであればその特異点は見かけ上のものにすぎない。従ってこれがより簡単な或はよく性質の知られた微分方程式に帰着されれば，ある意味でその方程式が解けたことになる。

この問題を解くためのアルゴリズムを作る上で問題となることは，才1にその微分方程式の決定方程式と呼ばれる代数方程式の根の中に整数差を持つものがあるかどうかを近似的にではなく求めることであり，才2にその微分方程式の確定特異点のまわりの巾級数解の係数が一般には有理数とはならないがこれをどう取扱えばよいかということである。

プログラミングの立場から云えば，リストプロセスで動かす多項式や有理式の演算のうちどれだけのものがあれば十分であるのか，或はこれだけでは出来ないのか，また出来るとしたらそのプログラムはどの様な形で記述されるのかということが興味の対象となる。

この報告において，上の問題が生ずる理由と，その問題に対する解答を与える。すなわち有理数係数の代数方程式が整数差を持つ根の組を有するかどうかは，この代数方程式を有理数の範囲で因数分解すればすぐに分る。また確定特異点のまわりの巾級数解の係数はこの代数方程式の根をλ（これは一般には有理数ではない）としたときλの有理関数としてあらわされる。これを実現するプログラムは有理数係数の一変数有理関数を係数とする多変数多項式の加減乗除と代入，微分，因数分解が出来ればよく，一般な単純化ルーチンは必要でないことが分る。以下にこれを詳述しよう。

§2. フロベニウスの方法

この節では線形常微分方程式の確定特異点における巾級数解を求めるアルゴリズムの概要をフロベニウスの方法に従って説明する。線形常微分方程式

(1) $$L(y) \equiv \sum_{i=0}^{n} (x-a)^{n-i} P_i(x)\, y^{(n-i)} = 0 \qquad P_0(x)=1$$

は $P_i(x)$ $i=1,\dots,n$ が $x=a$ で正則なとき $x=a$ を確定特異点に持つといい、$x=a$ において (1) に対応する決定方程式

(2) $$\sum_{i=0}^{n} P_{n-i}(a)\,\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1) = 0$$

の n 個の根 $\lambda=\lambda_1,\dots,\lambda_n$ に対応する n 個の独立な解

(3) $$\psi(x) = (x-a)^{\lambda}\left\{\sum_{i=0}^{h} \psi_i(x)\,(\log(x-a))^{i}\right\}$$

をもつ。ここに

(4) $$\psi_i(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{h}{i} g_m^{(h-i)}(\lambda)\,(x-a)^m \qquad i=0,1,\dots,h$$

は $x=a$ で正則で $\psi_i(a)$ の中には 0 でないものがある。また h は、(2) の根のうち整数差で移り得る一群を $\lambda_1,\dots,\lambda_\mu$ その重複度を $\nu_1,\dots,\nu_\mu$ としたとき $\xi_{\mu+1}=0$, $\xi_j=\nu_j+\nu_{j+1}+\cdots+\nu_\mu$, $j=1,2,\dots,\mu$ と定めた ξ_j を用いて $\lambda=\lambda_j$ に対応する解を (3)(4) で $h=\xi_{j+1},\xi_{j+1}+1,\dots,\xi_j-1$ とおいて得るものである。

ゆえに $g_m(\lambda)$ を求めることが分ればよい。(1) の解として

(5) $$g(x,\lambda) = (x-a)^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty} g_m (x-a)^m \qquad g_0 \neq 0$$

という形のものを考える。これを (1) に代入する。このとき

$$L((x-a)^{\lambda}) = (x-a)^{\lambda} f(x,\lambda)$$

(6)
$$f(x,\lambda)=\sum_{i=0}^{n} P_{n-i}(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)=\sum_{r=0}^{\infty} f_r(\lambda)(x-a)^r$$
$$f_r(\lambda)=\frac{1}{r!}\frac{\partial^r}{\partial x^r}f(x,\lambda)\Big|_{x=a}$$

に注意して

$$L(g(x,\lambda))=\sum_{m=0}^{\infty} g_m L((x-a)^{m+\lambda})=\sum_{m=0}^{\infty} g_m (x-a)^{m+\lambda} f(x,\lambda+m)$$
$$=(x-a)^{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{i=0}^{m} f_i(\lambda+m-i)g_{m-i}\right\}(x-a)^m$$

より (5) が (1) の解となるための必要条件として次の関係式

(7)
$$\sum_{i=0}^{m} f_i(\lambda+m-i)g_{m-i}=0 \qquad m=0,1,2,\cdots$$

をうる。逆に (7) をみたす g_m を係数とする巾級数 (5) は収束して (1) の解となることが知られているから g_m を決めることが出来ればよい。仮定より $g_0\neq 0$ だから λ は $f_0(\lambda)=0$ の根でなければならない。ところがこれが決定方程式 (2) に等しい。さて $f_0(\lambda)=0$ の根を $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ とするとき

1) λ_i の中に整数差を持つものも等しいものもないとき。
$\lambda=\lambda_i$ $i=1,\cdots,n$ に対して $f_0(\lambda+m)$ $m=1,2,\cdots$ は 0 にならないから g_m $m=1,2,\cdots$ を (7) により順に, $g_1=-f_0(\lambda+1)^{-1}\{f_1(\lambda)g_0\}$, $\cdots$ 一般に $g_1,\cdots,g_{m-1}$ まで求まっているとき,

$$g_m=-f_0(\lambda+m)^{-1}\sum_{i=1}^{m} g_{m-i}f_i(\lambda+m-i)$$

として求めることが出来る。$f_0(\lambda)=0$ より g_m は高々 $m-1$ 次の λ の有理係数の多項式を分子分母に持つ有理関数とすることができる。このときは解は (5) の形となり $\log(x-a)$ なる対数項は出現しない。

ii) λ_iの中に整数差をもつものか等しいものがあるとき

(7)においてg_0はλの関数と考え$m=1,2,\cdots$の式がみたされるようにすると

$$L(g(x,\lambda))=f_0(\lambda)g_0(\lambda)(x-a)^\lambda$$

$$g_1=-\frac{f_1(\lambda)}{f_0(\lambda+1)}g_0(\lambda),\ \cdots,\ g_m=\frac{\lambda\text{の多項式}}{f_0(\lambda+1)\cdots f_0(\lambda+m)}g_0(\lambda)$$

なることはすぐにわかる。ゆえに整数差の最大のものをqとして　$g_0(\lambda)=C\,f_0(\lambda+1)\cdots f_0(\lambda+q)$　とおくと，$m\leqq q$のときg_mはλの多項式となり，$m>q$のときは$g_m(\lambda)=\dfrac{\lambda\text{の多項式}}{f_0(\lambda+q+1)\cdots f_0(\lambda+m)}$なる形をもつ。この分母は全ての$\lambda_i$に対して0とならない。このように$g_m(\lambda)$を定めたとき$f_0(\lambda)g_0(\lambda)$が$\lambda-\lambda_j$を含む個数を調べると$\xi_j$個であり，$g_0(\lambda)$は$\xi_{j+1}$個であることが分る。これと　$L\left(\frac{\partial^h}{\partial\lambda^h}g(x,\lambda)\right)=\frac{\partial^h}{\partial\lambda^h}\left(f_0(\lambda)g_0(\lambda)(x-a)^\lambda\right)$　なることから

$$\frac{\partial^h}{\partial\lambda^h}g(x,\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_j}=(x-a)^\lambda\sum_{m=0}^{\infty}(x-a)^m\left\{\sum_{i=0}^{h}g_m^{(h-i)}(\lambda)\binom{h}{i}\left(\log(x-a)\right)^i\right\}\Big|_{\lambda=\lambda_j}\tag{8}$$

をうる。ここで$h=\xi_{j+1},\ \xi_{j+1}+1,\ \cdots,\ \xi_j-1$とおくことにより$\lambda_j$を指数とする解を$\nu_j$個うる。これは(3)，(4)を示している。

iii) 上で$\nu_j=1$ならば$h=\xi_{j+1}$とおいた解が唯一個得られるがこのとき対数項の出ないことがある。これは(7)において

$$\sum_{i=0}^{m}f_i(\lambda+m-i)g_{m-i}=0\qquad m=1,2,\cdots,q$$

が　$f_0(\lambda+k)=0\quad 1\leqq k\leqq q$　となるものがあるにもかかわらず成立つ場合である。この判定については§4でふれる。

§3. 代数方程式の根が整数差をもつ事の判定

ここで数式処理により微分方程式を解くときの条件をはっきりさせよう。(1) において $P_i(x)$ $i=0,1,\cdots,n$ は $P_0(x)=1$ で $i\geq 1$ のとき $x=a$（有理数）で正則な有理数係数をもつ有理関数とする。すると $x=a$ における決定方程式 (2) は有理数係数の λ の n 次多項式となる。必要ならば (2) の両辺に定数をかけて (2) を整数係数の代数方程式とみなすことが出来る。この節では整数係数の代数方程式 $f_0(\lambda)=0$ の根を整数差で移り得るものの組に分割するアルゴリズムを与える。

その為に既約な多項式 $=0$ とおいた代数方程式の中には重根も整数差を持つ根もないこと及び整数差 q を持つ根があることと $f_0(\lambda)=f_0(\lambda+q)=0$ が同値であることに注意すれば，

(9) $$f_0(\lambda)=\varphi_1(\lambda)^{\nu_1}\cdots\varphi_t(\lambda)^{\nu_t}$$

と有理数係数の範囲で因数分解したとき

(10) $$\varphi_i(\lambda)=\varphi_j(\lambda-q)\qquad i\neq j$$

をみたす (i,j) の組と q をすべて求めればよいことが分る。

$\varphi_i(\lambda)=0$ の根は一斉に同じ性質を持つから，$\varphi_i(\lambda)$ のまゝで扱うのである。まず φ_i と φ_j が同じ次数であることが分る。

$$\varphi_i(\lambda)=\sum_{l=0}^{k}a_l\lambda^l\quad,\qquad\varphi_j(\lambda)=\sum_{l=0}^{k}b_l\lambda^l$$

より $\varphi_i(\lambda)=\varphi_j(\lambda-q)$ として λ^k と λ^{k-1} の係数を調べて

(11) $$a_k=b_k,\quad q=(-a_{k-1}+b_{k-1})\,/\,(k\cdot b_k)$$

をうる。これから(10)をみたす(i, j)とqを全て求めるには，まず$\varphi_1(\lambda), \cdots, \varphi_r(\lambda)$を同じ次数のものに類別して，一つの類の中で$a_k = b_k$となる$\varphi_i(\lambda)$と$\varphi_j(\lambda)$に対して(11)の$q$を求めて，これが実際に$\varphi_j(\lambda - q) = \varphi_i(\lambda)$をみたしていることを判定すればよい。それには$\varphi_j(\lambda)$に$\lambda - q$を代入することが出来ればよい。以上の手続きで$f_0(\lambda)$を有限回で因数分解することが出来れば全体として有限回で行うことが出来ることが示されたわけである。ところで$f_0(\lambda)$を有限回で因数分解するにはいわゆるクロネッカーの方法を用いればよい。（文献2参照，その他の因数分解の方法については文献5参照のこと。）

§4. 決定方程式は重根を持たないが整数差を有する根の組を持つとき

決定方程式に対して§3の判定を行って標題の場合が生じた時には一般にフロベニウスの方法から分る様に解に対数項が出る。しかし§2 ii)の場合すなわち整数差の最大値qに対して，また$f_0(\lambda + k_j) = 0 \quad 1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_l \leqq q$でも

$$(12) \qquad \sum_{i=0}^{m} f_i(\lambda + m - i) g_{m-i} = 0 \qquad m = 1, 2, \cdots, q$$

が成立つようにg_{m-i}を定めることが出来れば対数項は出現しない。この判定は次のように行えばよい。

$g_0 = C$として§2 i)の方法で$g_1, \cdots, g_{k_1-1}$をλの有理数係数

の有理関数として求めることが出来る。次にこれから

(13) $$g_{k_1} f_0(\lambda+k_1) + A_{k_1}(\lambda) = 0$$

ここに $A_{k_1}(\lambda)$ は λ の有理数係数の有理関数，とすることが出来る。$f_0(\lambda+k_1)=0$ なのであるから $A_{k_1}(\lambda) \neq 0$ ならば (12) をみたす g_i はないし，$A_{k_1}(\lambda)=0$ なら g_{k_1} は任意でよい。前者ならば対数項が出現する。後者ならば g_{k_1} を自由項として，g_{k_1+1}, ---，g_{k_2-1} をもとめると $g_{k_1+i} = B_{k_1+i}(\lambda) g_{k_1} + A_{k_1+i}(\lambda)$ $i=1,2,\cdots,k_2-k_1-1$ なることが分る。前と同様にしてこれから

(14) $$g_{k_2} f_0(\lambda+k_2) + B_{k_2}(\lambda) g_{k_1} + A_{k_2}(\lambda) = 0$$

ここに $B_{k_2}(\lambda)$, $A_{k_2}(\lambda)$ は λ の有理数係数の有理関数，とすることが出来る。$f_0(\lambda+k_2)=0$ なのであるから $A_{k_2}(\lambda) \neq 0$，$B_{k_2}(\lambda)=0$ ならば (12) をみたす g_i はないし，$A_{k_2}(\lambda) \neq 0$, $B_{k_2}(\lambda) \neq 0$ ならば

(15) $$g_{k_1} = -A_{k_2}(\lambda) / B_{k_2}(\lambda)$$

として g_{k_2} を自由項とみなし，$A_{k_2}(\lambda)=0$，$B_{k_2}(\lambda)=0$ ならば g_{k_2}, g_{k_1} を自由項とみなして次へ進む。このことを g_{k_l} までくり返せば対数項出現の判定が有限回で，λ の有理数係数の有理関数を係数とする自由項 g_{k_i} の一次結合を扱うことによって得られる。対数項が出現しない場合，巾級数解の係数は一般に自由項を幾つか持っていることに注意しておこう。

上における $A_{k_i}(\lambda)=0$ などの判定はその分子多項式を今考えている既約多項式が割切るかどうかで分る。

§5. 確定特異点が代数的数の場合

今まで確定特異点が有理数である場合を考えてきた。この節では確定特異点が有理数係数の代数方程式 $r(x)=0$ の根であるとき，すなわち ω_iを $r(\omega_i)=0$ なる数とした時，次の形の微分方程式の $x=\omega_i$ のまわりの解を考える。

(16) $$\sum_{i=0}^{n}(r(x))^{n-i}P_i(x)y^{(n-i)}=0 \qquad P_0(x)=1$$

この方程式の $x=\omega_1$ における決定方程式は $r(x)$ と ω を(17)の様に考えた時(18)で与えられる。

(17) $$r(x)=r\prod_{i=1}^{s}(x-\omega_i) \qquad \omega=r\prod_{i=2}^{s}(\omega_1-\omega_i)$$

(18) $$\sum_{i=0}^{n}\omega^{n-i}P_i(\omega_1)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+i+1)=0$$

そこで§3，§4と同じように解の対数項出現の判定を行ってみる。決定方程式はやはり(9)の形に因数分解できる。但し多変数多項式の因数分解を行う。（文献 4 参照）このとき $f_0(\lambda)=\varphi_1(\lambda)^{\nu_1}\cdots\varphi_\tau(\lambda)^{\nu_\tau}$ における $\varphi_i(\lambda)$ の λ の係数は，一般に $\omega_1,\cdots,\omega_s$ の有理数係数の有理関数である。さて§3と同じく(11)の判定を行うには，例えば $a_k=b_k$ を考えると，$\omega_1,\cdots,\omega_s$ の整数係数の多項式が0になるかどうかを判定すればよい。それには $\omega_1,\cdots,\omega_s$ と $r(x)$ の係数との s 個の関係式を用いて，判定すべき多項式を ω_1だけであらわすことが出来る。これを $r(\omega_1)$ で割って割り切れるかどうかを見ればよい。他の判定も§4の方法も同様に考えることができる。

§6. 例題

$$\sum_{i=0}^{4} x^{4-i} P_i(x) y^{(4-i)} = 0 \tag{19}$$

$P_0(x)=1$, $P_1(x)=10$, $P_2(x)=x^2+x+25$, $P_3(x)=5(x^2+x+3)$, $P_4(x)=5(x^2+x+1)$

の $x=0$ における解を考える。$x=0$ は確定特異点である。

$$f(x,\lambda)=\sum_{i=0}^{4} P_{4-i}(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-i+1)$$

$$f_0(\lambda)=f(0,\lambda)=\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+5$$

$$=(\lambda^2+1)(\lambda^2+4\lambda+5)$$

λ^2+1 と $\lambda^2+4\lambda+5$ が整数差 q で移り得るものとすれば第3節より $q=(-0+4)/(2\cdot 1)=2$，実際 $(\lambda+2)^2+1=\lambda^2+4\lambda+5$

i) $\lambda^2+1=0$ の根を指数とする解を考える。このときは，$f_0(\lambda+m)\neq 0$ $m=1,2,\cdots$ だから対数項は出現しない。

$f_1(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+5$，$f_2(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+5$，$f_i(\lambda)=0$ $i=3,4,\cdots$

これと関係式(7)より $g_1, g_2, \cdots$ が λ の一次の有理関数として求められる。例えば $g_1 f_0(\lambda+1)+g_0 f_1(\lambda)=0$ より $g_1=-(4\lambda+4)/(4\lambda+3)g_0$ を得る。

ii) $\lambda^2+4\lambda+5=0$ の根を指数とする解を考える。このとき，$f_0(\lambda+2)=0$，$f_0(\lambda+i)\neq 0$ $i=1,3,4,5,\cdots$ だから対数項出現の判定は $g_1 f_0(\lambda+1)+g_0 f_1(\lambda)=0$，$g_2 f_0(\lambda+2)+g_1 f_1(\lambda+1)+g_0 f_2(\lambda)=0$ をみたす g_0, g_1, g_2 が定められればよい。このとき $f_1(\lambda)=f_2(\lambda)=0$ であるから，第1の式より $g_1=0$ を得る。これと第2の式より $g_2=0$ を得る。一般に $g_i=0$ $i\neq 0$ 故に $y=cx^{\lambda}$ が解となる。

§7. 有理数係数有理関数体（多変数）

今まで述べて来たことにより，線形常微分方程式の確定特異点における対数項の出現を判定する為には標題のものを扱うことが出来る数式処理用プログラムがあれば十分である。これは一変数の有理関数体を組合わすことによって実現することが出来るのであるが，この有理関数体においては加減乗除の他に変数への有理関数の代入，微分，多項式の因数分解が出来る必要がある。これは一変数多項式環における加減乗除と代入，微分，因数分解に帰着することが出来る。

所で有理数係数ということは整数の対を係数に持つことであり，取扱いが複雑になるので，有理数係数の多項式を

(20) $$\frac{p}{q}(a_m\lambda^m+a_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0) \qquad p,\ q,\ a_i \quad i=0,\cdots,m \text{ 整数}$$

の形であらわす。この方式の利点は$(a_m,\cdots,a_0)$の最大公約数を括弧の外に出すことにより，小さい整数をおぼえればすむことである。この時，多項式の加減乗及び多項式の代入，微分については，整数だけを取扱って行うアルゴリズムはすぐにわかる。因数分解はクロネッカーの方法であれば多項式の加減乗除に帰着される。残った割り算については次のアルゴリズムを用いればよい。

(21) $$f(\lambda)=a_m\lambda^m+\cdots+a_0\ ,\quad g(\lambda)=b_n\lambda^n+\cdots+b_0 \qquad m\geqq n$$

として $f(\lambda)/g(\lambda)$ の商と余りを求めるものとする。このとき

$(b_n^{m-n+1} f(\lambda))/g(\lambda)$ では途中で分数が出て来ることはない，また $m-n+1$ はこれを満たす最小の数である。商は(22)余りは(23).

$$(1/b_n^{m-n+1})(b_n^{m-n} a_m \lambda^{m-n} + b_n^{m-n-1} a_{m-1}^{(1)} \lambda^{m-n-1} + \cdots + b_n^0 a_n^{(m-n)} \lambda^0) \tag{22}$$

$$(1/b_n^{m-n+1})(a_{n-1}^{(m-n+1)} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0^{(m-n+1)}) \tag{23}$$

アルゴリズム

$$\left\{\begin{array}{l}
b_n^{m-n+1}(a_m\lambda^m + \cdots + a_0) = b_n^{m-n} a_m \lambda^{m-n}(b_n\lambda^n + \cdots + b_0) + b_n^{m-n}(a_{m-1}^{(1)}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0^{(1)}) \\
b_n^{m-n}(a_{m-1}^{(1)}\lambda^{m-1} + \cdots + a_0^{(1)}) = b_n^{m-n-1} a_{m-1}^{(1)} \lambda^{m-n-1}(b_n\lambda^n + \cdots + b_0) + b_n^{m-n-1}(a_{m-2}^{(2)}\lambda^{m-2} + \cdots + a_0^{(2)}) \\
- \\
b_n^1(a_n^{(m-n)}\lambda^n + \cdots + a_0^{(m-n)}) = b_n^0 a_n^{(m-n)} \lambda^0 (b_n\lambda^n + \cdots + b_0) + b_n^0(a_{n-1}^{(m-n+1)}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0^{(m-n+1)})
\end{array}\right. \tag{24}$$

いま $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ とも $p=q=1$ のときを示したが，そうでない場合についてのアルゴリズムはもはや明白である。

有理数係数の有理関数は次の形であらわす。

$$(p/q)(a_m\lambda^m + \cdots + a_0)/(b_n\lambda^n + \cdots + b_0) \tag{25}$$

多変数の場合には(20)；(25)における a_i, b_j を $a_i(\mu)$, $b_j(\mu)$：μ の多項式という様にあらわす。変数が3以上の場合も同様である。但し変数に対する優先順位のつけ方はプログラマ或はプログラムが意識したものでなければならない。

§8. 有理関数用の数式処理プログラム（文献3参照）

数式処理用のプログラムは，一般には数式をあらわす記号を全て記憶しておいて，これを式変形の規則に従って取扱っ

てゆくという形式をとっている。ここでは有理関数をできるだけ係数とそのリスト構造だけに近い形であらわす方法を考える。例えば(20)，(25)を次の(26)，(27)のようにあらわす。

(26) $(\lambda, p, q, a_0, a_1, ---, a_m)$

(27) $(\lambda, p, q, (a_0, a_1, ---, a_m), (b_0, b_1, ---, b_n))$

ここの記号はLISPのそれと同じものとし，p，q，a_i，b_jは整数とする。またλ^2+1は$1\lambda^2+0\lambda+1$としてあらわす。すると有理関数に対する四則，代入，微分等は係数a_i，b_jから新しい係数c_kを作るための簡単なアルゴリズムとして考えることが出来る。従って有理関数用のプログラムは，大きくわけて3つのサブルーチン群：B，P，RとRを使う主プログラムとになる。ここにBはリスト構造を扱う基本的なサブルーチン群，入出力，多倍長四則サブルーチン群をあわせたものである。PはBを用いた多項式を扱うサブルーチン群であり，RはPを用いた有理関数を扱うサブルーチン群である．この方式ではLISPの様に解釈ルーチンではなく，実行時サブルーチンへの呼び出し列からなるので実行時の時間が早くなる。またより高位の数式処理用言語を翻訳するプログラムも簡単になるものと思われる。

このプログラムの特徴的なことは，P又はRが扱う対象はそれが1つであれ或はそれ以上であれ，1つのリストの中に

納められる，従って対象が2以上の時はリストはサブリストを持つ，そしてP又はRのサブルーチンはそのリストをはじから処理していって，リストがつきたところで処理を終る，とこの様な形式をとることである。従ってサブルーチンへのパラメタはリストの最初を納めてある番地ということになる。例えば極く簡単な例でいうと，多項式(26)の微分はまずa_0をはずし，次にa_iを$i \times a_i$でおきかえたものを作る操作をリストがつきるまで行って得られる。

次にもっと複雑な決定方程式の根を整数差をもったものの組に類別するという例を考えよう。この時対象は

$$(f_0(\lambda) \text{のリスト})$$

という形で与えられている。次にこれを因数分解して，

$$(((\varphi_1(\lambda), \nu_1), (\varphi_2(\lambda), \nu_2)), \; ---, \; (\varphi_\tau(\lambda), \nu_\tau)))$$

の形にする。これは$f_0(\lambda) = \varphi_1(\lambda)^{\nu_1} \cdots \varphi_\tau(\lambda)^{\nu_\tau}$と因数分解され，しかも$\varphi_1(\lambda)$と$\varphi_2(\lambda)$は同じ次数の類に属することを意味する。次に対象が$((\varphi_1(\lambda), \nu_1), (\varphi_2(\lambda), \nu_2))$に移り，整数差$q$があれば$((0, \varphi_1(\lambda), \nu_1), (q, \varphi_2(\lambda), \nu_2))$なければ$(0, \varphi_1(\lambda), \nu_1)$と$(0, \varphi_2(\lambda), \nu_2)$とに別れる。等々である。

この考えを入出力に適用すれば，入力されるものは1つのリストに納められたものであり，出力されるものもそうであると考えるのが自然である。

以上はPまたはRのサブルーチン群の操作を示したのであるが，このことからBは，リストを左から右へ順に1つ見るサブルーチン，深くなる方へ1つ見るサブルーチン，リストの見て来た場所を記憶するためのスタック用サブルーチン，連結，切りはなし用サブルーチン等が必要なことが分る。もうこれらのサブルーチン類を記述することは容易であろう。

§9. 補遺

§3. の決定方程式の根を整数差を持つものに類別するのに因数分解によらなくでも，ユークリッドの互除法を用いれば判定できる。これは $f_0(\lambda)=0$ の根の範囲をMとした時，$i=-M, -M+1, \cdots, -1, 1, 2, \cdots, M$ として $f_0(\lambda)$ と $f_0(\lambda+i)$ が共通因子を持つかどうかをユークリッドの互除法で調べる。$\varphi_i(\lambda)$ が共通因子なら $\varphi_i(\lambda)$ と $\varphi_i(\lambda)$ の微係数とのユークリッドの互除法で重根を調べればよい。

参考文献

[1] 福原満洲雄　常微分方程式の解法 II　岩波 1941

[2] Van der Waerden　Modern Algebra, vol I, II　Unger Pub. Co. 1953

[3] Collins, G.E.　PM, A System for Polynomial Manipulation　Comm. A.C.M. vol 9 / no. 8 / Aug, 1966

[4] Jordan, D.E and others Symbolic Factoring of Polynomials in Several Variables Comm. A.C.M. vol 9, Aug '66

[5] 渡辺隼郎 数式処理のためのプログラミング技法 第9回プログラミング・シンポジウム報告集

[6] Stein, M.L. Divide-and-Correct Methods for Multiple Precision Division Comm. A.C.M. vol 7, Aug, 1964

[7] Moses, J. Solution of Systems of Polynomial Equations By Elimination Comm. A.C.M. Aug, 1966